2020年普通高等学校招生全国统一考试

数学

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项时符合题目要求的.

1、设集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$， $B=\{x|2<x<4\}$ ，则 $A\cup B=$（　　）

$A.\{x|2<x\le 3\}$　　$B.\{x|2\le x\le 3\}$　　$C.\{x|1\le x<4\}$　　$D.\{x|1<x<4\}$

2、$\dfrac{2-i}{1+2i}=$（　　）

$A.1$　　$B.\ -1$　　$C.i$　　$D.-i$

3、6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，则不同的安排方法共有（　　）

$A.$120种　　$B.$90种　　$C.$60种　　$D.$30种

4、日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间.把地球看成一个球（球心记为O），地球上一点A的纬度是指OA与地球赤道所在平面所成角，点A处的水平面是指过点A且与OA垂直的平面.在点A处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点A处的纬度为北纬40°，则晷针与点A处的水平面所成角为（　　）

$A.20^\circ$　　$B.40^\circ$　　$C.50^\circ$　　$D.90^\circ$

5、某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96％的学生喜欢足球或游泳，60％的学生喜欢足球，82％的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例时（　　）

$A.62\%$　　$B.56\%$　　$C.46\%$　　$D.42\%$

6、基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t（单位：天）的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$.有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28,\ \ T=6$.据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为（$\ln 2\approx 0.69$）（　　）

$A.$1.2 天　　$B.$1.8 天　　$C.$2.5 天　　$D.$3.5 天

7、已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是（　　）

$A.(-2,6)$　　$B.(-6,2)$　　$C.(-2,4)$　　$D.(-4,6)$

8、若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是（　　）

$A.[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　$B.[-3,-1]\cup[0,1]$　　$C.[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　$D.[-1,0]\cup[1,3]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9、已知曲线 $C:mx^2+ny^2=1$.（　　）

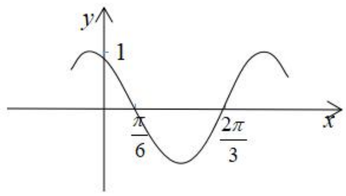
$A.$若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

$B.$若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$

$C.$若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

$D.$若 $m=0,\ \ n>0$，则 C 是两条直线

10、右图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$（　　）



$A.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$　　$B.\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$　　$C.\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　$D.\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)$

11、已知 $a>0,\ b>0$，且 $a+b=1$，则（　　）

$A.a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　$B.2^{a-b}>\frac{1}{2}$　　$C.\log_2 a+\log_2 b\geqslant-2$　　$D.\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12、信息熵是信息论中的一个重要概念.设随机变量 X 所有可能的取值为 1,2，…，n，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$.

$A.$若 $n=1$，则 $H(x)=0$

$B.$若 $n=2$，则 $H(x)$ 随着 p_i 的增大而增大

$C.$若 $p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $H(x)$ 随着 n 的增大而增大

$D.$若 $n=2m$，随机变量 Y 的所有可能取值为 1,2，…，m，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}\ (j=1,2,\cdots,m)$ 则 $H(X)\leqslant H(Y)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$__________.

14、将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为__________.

15、某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示，O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心，A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点，B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点，四边形 $DEFG$ 为矩形，$BC\perp DG$，垂足为 C，$\tan\angle ODC=\frac{3}{5},\quad BH//DG,\quad EF=12cm,DE=2cm$，$A$ 到直线 DE 和 EF 的距离均为 $7cm$，圆孔半径为 $1cm$，则图中阴影部分的面积为__________ cm^2.

16、已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60^{\circ}$，以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17、（10 分）

在① $ac=\sqrt{3}$，② $c\sin A=3,$ ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在 ΔABC，它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B,\quad C=\frac{\pi}{6}$，____________________？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18、（12 分）

已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20,\quad a_3=8$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m]\left(m\in N^*\right)$ 中的项的个数，求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100}.

19、（12 分）

为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中的 $PM2.5$ 和 SO_2 浓度（单位：$\mu g/m^3$），得下表：

SO_2 / PM2.5	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4

$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

（1）估计事件“该市一天空气中 $PM2.5$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150”的概率；

（2）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

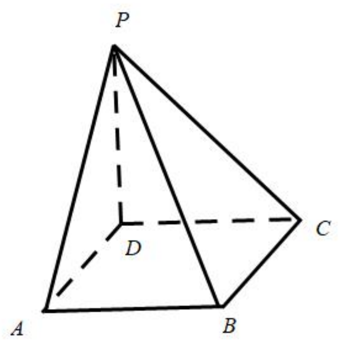
（3）根据（2）中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 $PM2.5$ 浓度与 SO_2 浓度有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20、（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$．设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l．



（1）证明：$l\perp$ 平面 PDC；

（2）已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.

21、（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f\left(x\right)\geq 1$，求 a 的取值范围.

22、（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

（1）求 C 的方程；

（2）点 M,N 在 C 上，且 $AM\perp AN,AD\perp MN,D$ 为垂足.证明：存在定点 Q，使得 $\left|DQ\right|$ 为定值.